29/11/2019

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ: Δοθέντων των σημείων $(x_i, f(x_i))$ $i=0,1,\dots,n$, x_i διαφορετικά μεταξύ τους, να βρεθεί μία απλή συνάρτηση που θα περνάει κοντά από αυτά τα σημεία. Απλή με την έννοια να μελετάται εύκολα.

Η παρεμβολή ως πρόβλημα: Να βρεθεί απλή συνάρτηση φ που θα περνάει από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$ $i=0,1,\dots,n$, δηλαδή $\varphi(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$

Αν φ είναι πολυώνυμο τότε έχουμε την πολυωνυμική παρεμβολή

Θεώρημα Weierstrass: Δοθέντων $f \in C[a,b]$ και $\varepsilon>0$, τότε $\exists$ πολυώνυμο p τ.ω $\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)|}_{= \|f-p\|_\infty}<\varepsilon$ (χωρίς αποδ.)

Θεώρημα: Δοθέντων $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ($n+1$ αριθμοί) διαφορετικών μεταξύ τους και των $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ (όχι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους) υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο p το πολύ n-βαθμού τ.ω $p(x_i)=y_i$ για $i=0,\dots,n$ ($p\in \mathbb{P}_n$)
$\mathbb{P}_n$ ο χώρος των πολυωνύμων το πολύ n-βαθμού

Απόδειξη: Έστω $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n \in \mathbb{P}_n$. Τότε από αυτές τις σχέσεις παίρνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} a_0+x_0a_1+x_0^2a_2+\dots+x_0^na_n &= y_0=p(x_0)\\ a_0+x_1a_1+x_1^2a_2+\dots+x_1^na_n &= y_1=p(x_1)\\ &\vdots\\ a_0+x_na_n+x_n^2a_n+\dots+x_n^2a_n &= y_n=p(x_n)\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow$$

$Xa=y$ (με τη μορφή πινάκων) - το a είναι το άγνωστο

$X\in\mathbb{R}^{n+1,n+1}$, $\vec{a}\in\mathbb{R}^{n+1}$, $y\in\mathbb{R}^{n+1}$

$$X=\begin{bmatrix}1 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ 1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \vdots & & & \\ 1 & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{bmatrix}, X\in\mathbb{R}^{n+1,n+1}$$

. Ο πίνακας X είναι πίνακας Vardermonde με x_i διαφορετικά μεταξύ τους που σημαίνει ότι $\det(X)\neq 0$ επομένως, έχει μοναδική λύση το γραμμικό σύστημα $Xa=y$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $n\in\mathbb{N}_0$ και $f\in C^{n+1}[a,b]$ και $\overbrace{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n}^{\text{διαφορετικά μεταξύ τους}}\in[a,b]$, τότε το σφάλμα κατά την παρεμβολή της f στα σημεία αυτά είναι $f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, $\xi\in(a,b)$, το ξ εξαρτάται από το x

$$\|f-p\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)| \le \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|\prod(x-x_i)\right|$$

Απόδειξη: Ορίζουμε ως $\phi(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ και τη συνάρτηση φ τ.ω

$$\varphi(t)=f(t)-p(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\phi(t) \quad x\neq x_i \quad i=0,1,\dots,n$$

Προφανώς $\varphi\in C^{n+1}[a,b]$, επίσης $\phi(x_i)=f(x_i)-p(x_i)=0$

$$\varphi(x_i)=f(x_i)-p(x_i)-\frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\overset{0}{\phi(x_i)}=f(x_i)-p(x_i)=0 \text{ για } i=0,1,2,\dots,n$$

$$\varphi(x)=f(x)-p(x)-\frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\cdot\phi(x)=0.$$ Η φ έχει $n+2$ ρίζες στο $[a,b]$

Η φ' από το θεώρημα του Rolle θα έχει τουλ. $n+1$ ρίζες. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι θα υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τ.ω $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$

$$\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-p^{(n+1)}(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\phi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}(n+1)!,$$

επειδή $\phi(t)=t^{n+1}+q(x)$, $q\in\mathbb{P}_n$

Για $t=\xi$: $0=\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}(n+1)! \iff f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\phi(x)$

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΚΑΤΑ LAGRANGE

Θεωρούμε $L_i(x)\in\mathbb{R}_n$ τ.ω $L_i(x_j)=\delta_{ij}$, το δέλτα του Kronecker, $i=0,1,\dots,n$

Το L_i έχει n ρίζες $x_0,x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ επομένως $L_i(x)=a_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$

$L_1(x_1)=1=a_i\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)\iff a_i=\frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$, οπότε $L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$, ως πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό

$$p(x)=f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+\dots+f(x_n)L_n(x)\in\mathbb{P}(n)$$

$p(x_k)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)L_i(x_k)=f(x_k)$, άρα το p είναι πολ/μο παρεμβολής της f.

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)L_i(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\prod_{j=0}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$